

Egzamin z Wstępu do Teorii Gier

9 luty 2016, sala C-4B, g. 9.50-11.20

Wykładowca: dr Michał Lewandowski

Instrukcje

- 1) Egzamin trwa 90 minut.
- 2) Proszę wyraźnie zapisać swoje imię, nazwisko oraz numer albumu.
- 3) Są dwa zadania do rozwiązania. Max liczba punktów podana jest przy każdym podpunkcie.
- 4) Wszystkie odpowiedzi „na czysto” (tj. bez przekreśleń) muszą być umieszczone w wyznaczonym do tego miejscu na wydrukowanym arkuszu. Dodatkowe kartki nie będą zbierane i sprawdzane.
- 5) Nie można korzystać z żadnych pomocy (zeszytów, książek, notatek, komórek, komputerów i ściąg). Nie wolno kontaktować się z innymi studentami podczas egzaminu. Niestosowanie się do powyższych zasad skutkuje obniżeniem oceny lub niezaliczeniem przedmiotu.

Życzę powodzenia!

Problem 1 [15p]

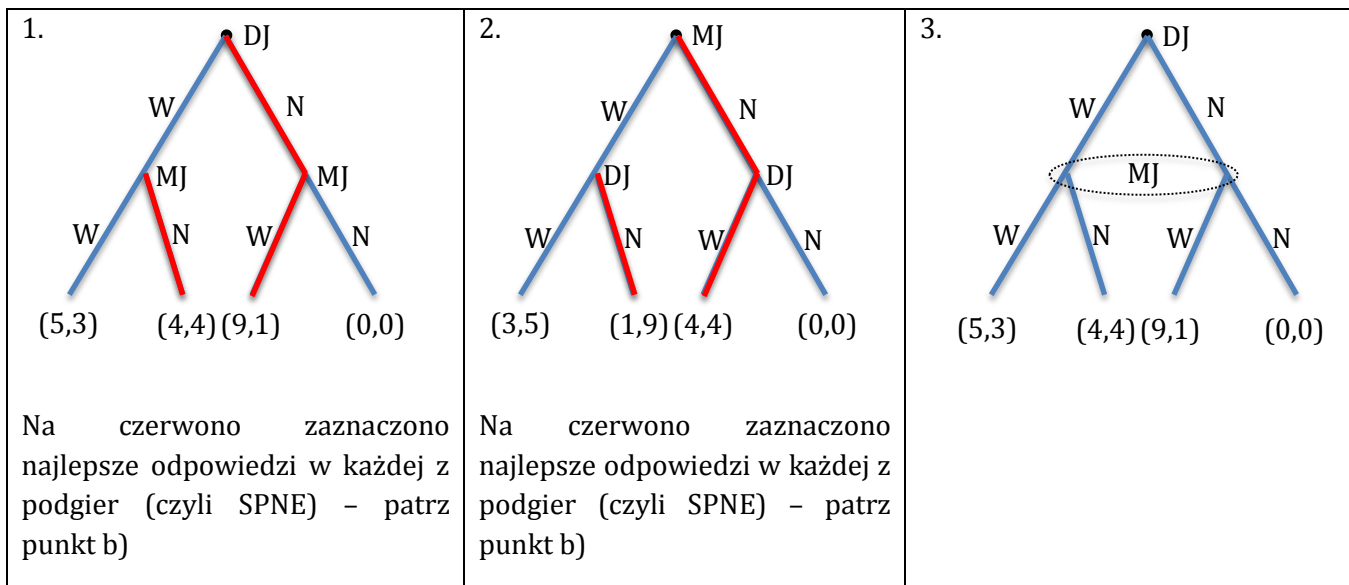
Duży John (DJ) i Mały John (MJ) jedzą kokosy zwisające z gałęzi drzewa palmowego. Jedno drzewo rodzi tylko jeden owoc. Aby owoc spadł przynajmniej jeden z Johnów musi się wspinać na palmę i potrząsnąć gałęzią. Kokos jest warty 10 Kcal (kilokalorii) energii. Koszt wdrapania się na drzewo można pominąć w przypadku Małego Johna, natomiast w przypadku Dużego Johna wynosi 2 Kcal. Jeżeli obaj wejdą na drzewo, wstrząsną gałęzią, zejść na dół i zjedzą kokosa, Duży John otrzyma 7 Kcal a Mały John 3 Kcal. Jeżeli na drzewo wejdzie tylko Duży John, podczas gdy Mały John będzie czekał na dole na spadającego kokosa, Duży John otrzyma 6 Kcal a Mały John 4 Kcal. W przeciwnym wypadku, gdy tylko Mały John wejdzie na drzewo, Duży John otrzyma 9 Kcal a Mały John 1 Kcal. Co zrobi Mały John i Duży John, aby zmaksymalizować korzyść energetyczną netto?

Rozważ trzy przypadki:

1. Duży John (DJ) decyduje jako pierwszy, czy wspinać się na drzewo (W), czy nie (N)
2. Mały John (MJ) decyduje jako pierwszy, czy wspinać się na drzewo (W), czy nie (N)
3. Obaj decydują równocześnie.

Dla każdego z powyższych przypadków:

- a) [3p] Narysuj grę w postaci ekstensywnej, tj. w postaci drzewa. Zapisz pary wypłat mierzonych w Kcal w tej samej kolejności, co kolejność ruchów graczy w poszczególnych przypadkach:



b) [3p] Znajdź równowagi doskonałe w podgrach (SPNE) w strategiach czystych w każdej z tych trzech gier. Podaj również wypłaty graczy w równowadze.

| | | |
|--|---|---|
| <p>1. SPNE: (N,NW)* wypłaty: (9,1)</p> <p>*pierwsza litera strategii MJ oznacza, co robi, gdy DJ zagra W a druga litera oznacza, co robi, gdy DJ zagra N</p> | <p>2. SPNE: (N,NW)* wypłaty: (4,4)</p> <p>*pierwsza litera strategii DJ oznacza, co robi, gdy MJ zagra W, a druga litera oznacza, co robi, gdy MJ zagra N</p> | <p>3. SPNE: (W,N) oraz (N,W) wypłaty: (4,4) oraz (9,1)</p> <p>Rozwiązuje się za pomocą tabelki (patrz punkt c)) tak samo jak w przypadku równowagi Nasha, ponieważ tutaj jest tylko jedna podgra, która jest zarazem całą grą</p> |
|--|---|---|

c) [2p] Zapisz te trzy gry w postaci standardowej (tabelka)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|----|---|-------|-------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-------|--|--|----|----|----|----|---|-------|-------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-------|--|--|---|---|---|-------|-------|---|-------|-------|
| <p>1. Wiersz DJ, Kolumna MJ</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>WW</td><td>WN</td><td>NW</td><td>NN</td></tr> <tr><td>W</td><td>(5,3)</td><td>(5,3)</td><td>(4,4)</td><td>(4,4)</td></tr> <tr><td>N</td><td>(9,1)</td><td>(0,0)</td><td>(9,1)</td><td>(0,0)</td></tr> </table> | | WW | WN | NW | NN | W | (5,3) | (5,3) | (4,4) | (4,4) | N | (9,1) | (0,0) | (9,1) | (0,0) | <p>2. Wiersz MJ, Kolumna DJ</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>WW</td><td>WN</td><td>NW</td><td>NN</td></tr> <tr><td>W</td><td>(3,5)</td><td>(3,5)</td><td>(1,9)</td><td>(1,9)</td></tr> <tr><td>N</td><td>(4,4)</td><td>(0,0)</td><td>(4,4)</td><td>(0,0)</td></tr> </table> | | WW | WN | NW | NN | W | (3,5) | (3,5) | (1,9) | (1,9) | N | (4,4) | (0,0) | (4,4) | (0,0) | <p>2. Wiersz DJ, Kolumna MJ</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>W</td><td>N</td></tr> <tr><td>W</td><td>(5,3)</td><td>(4,4)</td></tr> <tr><td>N</td><td>(9,1)</td><td>(0,0)</td></tr> </table> | | W | N | W | (5,3) | (4,4) | N | (9,1) | (0,0) |
| | WW | WN | NW | NN | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| W | (5,3) | (5,3) | (4,4) | (4,4) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| N | (9,1) | (0,0) | (9,1) | (0,0) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | WW | WN | NW | NN | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| W | (3,5) | (3,5) | (1,9) | (1,9) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| N | (4,4) | (0,0) | (4,4) | (0,0) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | W | N | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| W | (5,3) | (4,4) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| N | (9,1) | (0,0) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

d) [3p] Wyznacz wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych. Dla każdej równowagi podaj wypłaty graczy w równowadze. Dla każdej równowagi Nasha podaj, czy stanowi niewiarygodną groźbę (incredible threat), czy też nie. Jeżeli tak, to podaj, kto komu grozi.

| <p>1.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th>Równowaga</th><th>Wypłaty</th><th>Groźba?</th></tr> <tr><td>(N,WW)</td><td>(9,1)</td><td>NIE</td></tr> <tr><td>(N,NW)</td><td>(9,1)</td><td>NIE</td></tr> <tr><td>(W,NN)</td><td>(4,4)</td><td>TAK*</td></tr> </table> <p>MJ grozi DJ, że zagra N, gdy on zagra N, co jest niewiarygodną groźbą, bo mu się to nie opłaca</p> <p>Czerwona równowaga to SPNE</p> | Równowaga | Wypłaty | Groźba? | (N,WW) | (9,1) | NIE | (N,NW) | (9,1) | NIE | (W,NN) | (4,4) | TAK* | <p>2.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th>Równowaga</th><th>Wypłaty</th><th>Groźba?</th></tr> <tr><td>(N,WW)</td><td>(4,4)</td><td>NIE</td></tr> <tr><td>(N,NW)</td><td>(4,4)</td><td>NIE</td></tr> <tr><td>(W,NN)</td><td>(1,9)</td><td>TAK*</td></tr> </table> <p>DJ grozi MJ, że zagra N, gdy on zagra N, co jest niewiarygodną groźbą, bo mu się to nie opłaca</p> <p>Czerwona równowaga to SPNE</p> | Równowaga | Wypłaty | Groźba? | (N,WW) | (4,4) | NIE | (N,NW) | (4,4) | NIE | (W,NN) | (1,9) | TAK* | <p>3.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th>Równowaga</th><th>Wypłaty</th><th>Groźba?</th></tr> <tr><td>(N,W)</td><td>(9,1)</td><td>NIE</td></tr> <tr><td>(W,N)</td><td>(4,4)</td><td>NIE</td></tr> </table> <p>Czerwona równowaga to SPNE</p> | Równowaga | Wypłaty | Groźba? | (N,W) | (9,1) | NIE | (W,N) | (4,4) | NIE |
|--|-----------|---------|---------|--------|-------|-----|---------------|-------|-----|--------|-------|------|--|-----------|---------|---------|--------|-------|-----|---------------|-------|-----|--------|-------|------|---|-----------|---------|---------|--------------|-------|-----|--------------|-------|-----|
| Równowaga | Wypłaty | Groźba? | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (N,WW) | (9,1) | NIE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (N,NW) | (9,1) | NIE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (W,NN) | (4,4) | TAK* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Równowaga | Wypłaty | Groźba? | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (N,WW) | (4,4) | NIE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (N,NW) | (4,4) | NIE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (W,NN) | (1,9) | TAK* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Równowaga | Wypłaty | Groźba? | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (N,W) | (9,1) | NIE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (W,N) | (4,4) | NIE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

- e) [4p] Dla przypadku gry jednoczesnej (3.) wyznacz dodatkowo równowagę (SPNE) w strategiach mieszanych (jeżeli istnieje) i podaj wypłaty w tej równowadze. Wyznacz dla tej gry korespondencje najlepszych odpowiedzi (w postaci algebraicznej) i narysuj je na wykresie (w postaci graficznej).

Równowaga: $(\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}N, \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}N)$ Wypłaty: (4,5;2)

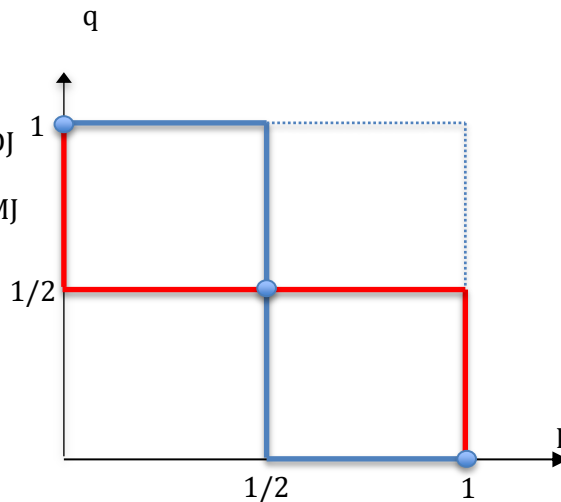
Korespondencje najlepszych odpowiedzi:

p – prawdopodobieństwo wybrania W przez DJ

q – prawdopodobieństwo wybrania W przez MJ

$$BR_{MJ}(p) = \begin{cases} q = 0 & \text{jeśli } p > 0,5 \\ q \in [0,1] & \text{jeśli } p = 0,5 \\ q = 1 & \text{jeśli } p < 0,5 \end{cases}$$

$$BR_{DJ}(q) = \begin{cases} p = 0 & \text{jeśli } q > 0,5 \\ p \in [0,1] & \text{jeśli } q = 0,5 \\ p = 1 & \text{jeśli } q < 0,5 \end{cases}$$



Problem 2 [10p]

Asterix napotyka Artifisa. Artifis nie wie, czy Asterix wypił magiczny napój (jest silny), czy też nie (jest słaby). Wg jego oceny Asterix wypił napój z prawdopodobieństwem p . Asterix z kolei nie ma wątpliwości co do oceny siły Artifisa (jest doskonale poinformowany). Każda z osób może walczyć (W) lub się poddać (P). Walka ma miejsce tylko wtedy, gdy obaj zdecydują się walczyć. Jeżeli Asterix jest silny, pokona Artifisa w walce. Jeżeli jest słaby, Artifis pokona Asterixa. Obaj mają te same preferencje: zwycięstwo w walce: +2, przegrana w walce: -2, poddanie się: 0, poddanie się przeciwnika: +1.

- a) [2p] Sformułuj tę sytuację jako grę Bayesowską, gdzie z punktu widzenia Artifisa (gracz wierszowy) Asterix ma dwa typy: silny lub słaby.

Typ Asterixa: silny

| | | |
|---|--------|-------|
| | W | P |
| W | (-2,2) | (1,0) |
| P | (0,1) | (0,0) |

Typ Asterixa: słaby

| | | |
|---|--------|-------|
| | W | P |
| W | (2,-2) | (1,0) |
| P | (0,1) | (0,0) |

- b) [2p] Czy istnieje równowaga Bayesowska Nasha, w której silny typ Asterixa wybierze P (poddąć się)? Dlaczego?

Nie istnieje, ponieważ dla silnego Asterixa jest to strategia ściśle zdominowana przez strategię W.

- c) [3p] Dla jakich wartości p istnieje łącząca (pooling: oba typy Asterixa wybierają tę samą strategię) równowaga Bayesowska Nasha w tej grze? Znajdź tę równowagę.

Równowaga łącząca pooling występuje tylko wtedy, gdy $p \geq \frac{1}{2}$ i wynosi (P,WW), gdzie strategia dot. Asterixa składa się z dwóch liter: pierwsza to strategia silnego Asterixa a druga to strategia słabego Asterixa

Uzasadnienie: Jeżeli silny Asterix gra W a słaby Asterix również gra W, to Artifis się podda jeżeli $p \geq \frac{1}{2}$, ponieważ jego oczekiwana wypłata to $-2p + 2(1 - p)$ jeżeli wybierze W oraz 0, jeżeli wybierze P. Z kolei na strategię P Artifisa najlepszą odpowiedzią silnego Asterixa jest W i słabego Asterixa również W.

- d) [3p] Dla jakich wartości p istnieje separująca (separating: jeden typ Asterixa wybiera inną strategię niż drugi) równowaga Bayesowska Nasha w tej grze? Znajdź tę równowagę.

Równowaga separująca (separating) występuje tylko wtedy, gdy $p \leq \frac{1}{3}$ i wynosi (W,WP), gdzie strategia dot. Asterixa składa się z dwóch liter: pierwsza to strategia silnego Asterixa a druga to strategia słabego Asterixa

Uzasadnienie: Jeżeli silny Asterix gra W a słaby gra P, to Artifis będzie walczył jeżeli $p \leq \frac{1}{3}$, ponieważ jego oczekiwana wypłata to $1 - 3p$, jeżeli wybierze W i 0, jeżeli wybierze P. Z kolei na strategię W Artifisa najlepszą odpowiedzią silnego Asterixa jest W a słabego Asterixa jest P.