Egzamin z Wstępu do Teorii Gier

19 styczeń 2016, sala A9, g. 11.40-13.10

Wykładowca: dr Michał Lewandowski

Instrukcje

1) Egzamin trwa 90 minut.
2) Proszę wyraźnie zapisać swoje imię, nazwisko oraz numer albumu.
3) Są trzy zadania do rozwiązania z punktami zaznaczonymi przy każdym podpunkcie.
4) Wszystkie odpowiedzi „na czysto" (tj. bez przekreśleń) muszą być umieszczone w wyznaczonym do tego miejscu na wydrukowanym arkuszu. Dodatkowe kartki nie będą zbierane i sprawdzane.
5) Nie można korzystać z żadnych pomocy (zeszytów, książek, notatek, komórek, komputerów i ściąg). Nie wolno kontaktować się z innymi studentami podczas egzaminu. Niestosowanie się do powyższych zasad skutkuje obniżeniem oceny lub niezaliczeniem przedmiotu.

Życzę powodzenia!

****

Problem 1 [4p] Pary osobników tej samej populacji angażują się w następującą grę. Każdy z graczy ma trzy akcje: 1, 2, 3, które oznaczają zgłoszony popyt na dane dobro. Jeżeli obaj gracze w parze zgłoszą ten sam popyt, każdy otrzyma to, czego żądał. W przeciwnym przypadku gracz, który zgłosił niższy popyt otrzyma tyle, ile zgłosić drugi gracz, a ten, co zgłosił większy popyt otrzyma ¼ swojego popytu. Uzupełnij tabelę wypłat. Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych. Następnie znajdź wszystkie równowagi stabilne ewolucyjnie w strategiach czystych. Przypomnienie: Pamiętaj, że aby strategia S była stabilna ewolucyjnie to musi być nie gorsza przeciwko jakiejkolwiek alternatywie niż ta alternatywa jest dla siebie samej.

	1	2	3
1	(1,1)	(2,0.5)	(3,0.75)
2	(0.5,2)	(2,2)	(3,0.75)
3	(0.75,3)	(0.75,3)	(3,3)

[1p] Równowagi Nasha: (1,1), (2,2), (3,3)

[3p] Równowagi stabilne ewolucyjnie: (1,1), pozostałe równowagi Nasha nie są stabilne ewolucyjnie, ponieważ obie strategie (2 i 3) są gorsze przeciwko strategii 1 niż ta strategia jest przeciwko sobie samej

Problem 2 [6p] Dana jest następująca gra:

	L	P
G	(2,6)	(10,5)
D	(4,8)	(0,0)

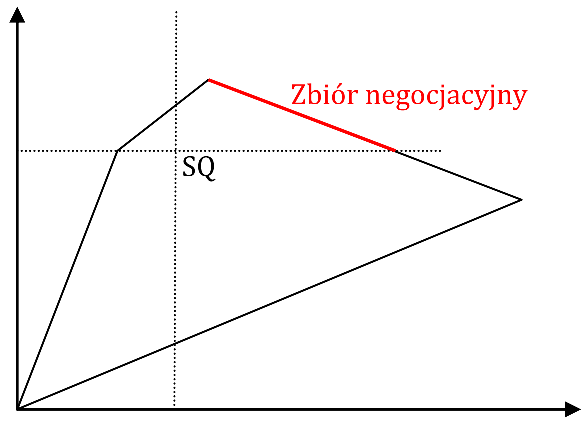
a) [2p] Zapisz w dwóch tabelkach grę Wiersza i grę Kolumny. Znajdź poziomy bezpieczeństwa graczy w tej grze (wypłaty, które mogą sobie zagwarantować grając strategię bezpieczeństwa w tej grze):

Gra Wiersza				Gra Kolumny		
	L	P			L	P
G	(2,-2)	(10,-10)		G	(-6,6)	(-5,5)
D	(4,-4)	(0,0)		D	(-8,8)	(0,0)

W grze Wiersza jest tylko równowaga mieszana $\left(\frac{1}{3}\mathrm{G}+\frac{2}{3}\mathrm{D},\frac{5}{6}\mathrm{L}+\frac{1}{6}\mathrm{R}\right)$ z wypłatą dla Wiersza równą $\frac{10}{3}$. Z kolei w grze Kolumny jedyną równowagą jest (G,L) z wypłatą dla Kolumny równą 6.

Poziom bezpieczeństwa Wiersza: $\frac{10}{3}$ Kolumny: 6

b) [2p] Narysuj wielobok wypłat dla gry w postaci pierwotnej i zaznacz Status Quo zdefiniowany poprzez poziomy bezpieczeństwa graczy oraz zbiór negocjacyjny.



c) [2p] Znajdź rozwiązanie arbitrażowe Nasha

$$\begin{aligned}&\max\left(x-\frac{10}{3}\right)(y-6)\\ &\text{p.w. } y=10-\frac{1}{2}x\\ &\qquad y\geq 6, x\geq\frac{10}{3}\end{aligned}$$

Rozwiązanie to punkt $\left(5\frac{2}{3},7\frac{1}{6}\right)$

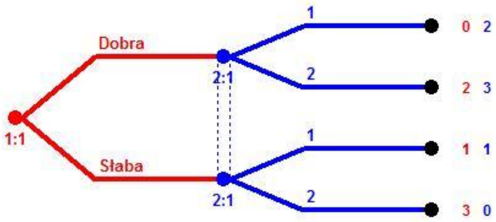
Problem 3 [14p]

Andrzej prowadzi firmę produkującą herbatę. Basia jest jego jedyną klientką. Andrzej musi zdecydować, czy produkować herbatę dobrej (D) czy słabej (S) jakości. Herbata dobrej jakości jest droższa w produkcji. Basia musi zdecydować czy kupić jedną (1) czy dwie (2) puszki herbaty. Wszystkie puszki w danej linii produkcyjnej są tej samej jakości. Basia nie odróżnia jakości herbaty w momencie kupna, ale odkrywa ją później w momencie picia. Wypłata Basi wynosi: 3, jeśli kupi 2 puszki i herbata okaże się dobra; 2, jeśli kupi 1 puszkę i herbata okaże się dobra; 1, jeśli kupi 1 puszkę i herbata okaże się zła; 0, jeśli kupi 2 puszki i herbata okaże się zła. Wypłata Andrzeja wynosi: 3, jeśli zrobi złą herbatę i sprzeda 2 puszki; 2, jeśli zrobi dobrą herbatę i sprzeda 2 puszki; 1, jeśli zrobi złą herbatę i sprzeda 1 puszkę; 0, jeśli zrobi dobrą herbatę i sprzeda 1 puszkę.

Uwaga: Części (d)-(f) można zrobić bez zrobienia części (b)-(c).

a) [2p] Narysuj grę w postaci drzewa. Czy można tę grę przedstawić za pomocą tabeli. Jeżeli tak, to zrób to. Znajdź wszystkie równowagi Nasha i je podaj.

Drzewo: Tabela:

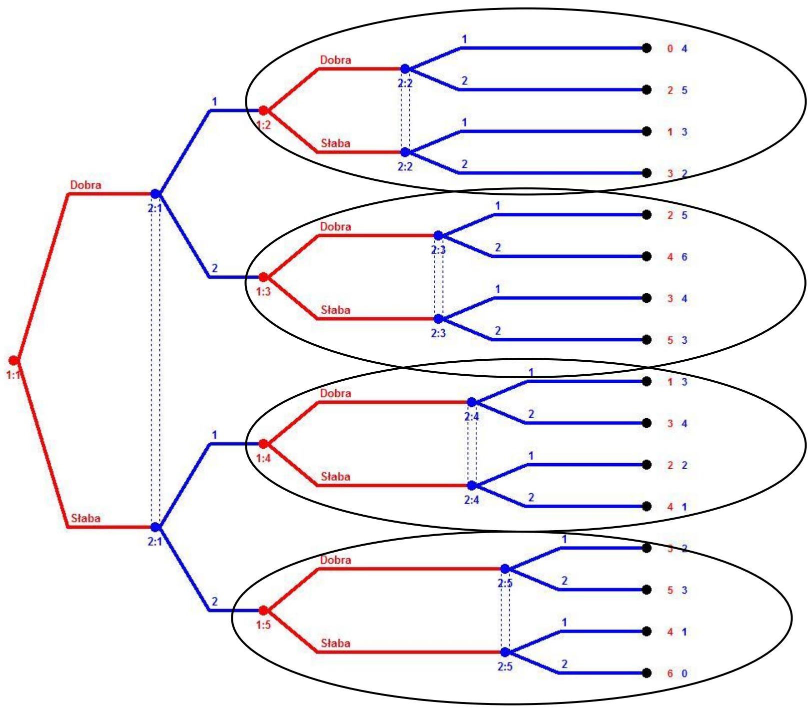


	1	2
D	(0,2)	(2,3)
S	(1,1)	(3,0)

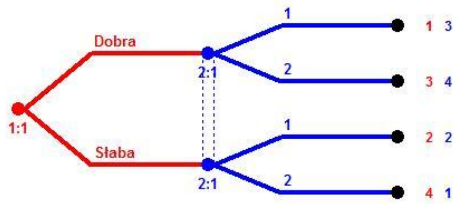
Równowagi Nasha: Jedyna równowaga Nasha to (S,1)

Załóżmy, że Andrzej i Basia współpracują ze sobą dłużej niż jednorazowo. W każdym okresie Jan musi wybrać jakość produkowanej herbaty dla tego okresu; Basia z kolei wybiera liczbę puszek, którą chce kupić w danym okresie; wypłaty są realizowane w każdym okresie (Basia wypija herbatę). Aby uzyskać łączną wypłatę sumujemy wypłaty z obu okresów. Niech δ_A będzie współczynnikiem dyskontowania Andrzeja a δ_B współczynnikiem dyskontowania Basi.

b) [2p] Najpierw rozważ przypadek, kiedy gra rozgrywana jest tylko dwa razy i kończy się (są dwa okresy). Załóżmy, że nie ma dyskontowania $\delta_A=\delta_B=1$. Narysuj grę w postaci drzewa. Znajdź równowagę doskonałą w podgrach (SPNE). Pamiętaj o wskazaniu kompletnej strategii dla każdego gracza oraz o wyjaśnieniu stosowanej notacji dla strategii.



Wypłaty w powyższym drzewie powstają w wyniku dodania odpowiednich wypłat z jednego okresu do siebie. Znalezienie równowagi doskonałej w podgrach jest proste. Najpierw rozwiązujemy gry zakreślone elipsami. Każda z tych gier jest równoważna grze z podpunktu a). Jedyna różnica to dodanie do wszystkich wypłat w grze wypłaty z pierwszego okresu (kolejno w poszczególnych grach dodajemy wypłaty (0,2), (2,3), (1,1) i (3,0)). A zatem równowaga jest ta sama w każdej z tych podgier i wynosi (S,1) a wypłaty w równowadze wynoszą kolejno (1,3), (3,4), (2,2), (4,1). Zastępujemy podgry oznaczone elipsami tymi właśnie wypłatami i rozwiązujemy powstałą grę.



Równowagą doskonałą w podgrach jest $(S_{SSSS}, 1_{1111})$, gdzie duże znaki oznaczają akcje graczy w pierwszym okresie, a małe znaki oznaczają akcje graczy w drugim okresie w każdym z ich czterech węzłów decyzyjnych (w przypadku Andrzeja) lub zbiorów informacyjnych (w przypadku Basi).

c) [2p] Teraz rozważ przypadek, gdy gra powtarzana jest nieskończenie wiele razy, gdzie $0 \leq \delta_A, \delta_B \leq 1$. Znajdź taką równowagę doskonałą w podgrach (SPNE), w której na ścieżce równowagi (tj. wtedy, gdy każdy gra swoją strategię równowagi) Andrzej produkuje dobrą herbatę w każdym okresie a Basia kupuje 2 puszki herbaty w każdym okresie. Wskaż kompletną strategię dla każdego gracza, wyjaśnij dlaczego zaproponowany przez Ciebie profil strategii jest równowagą. Jeśli on zależy od wartości δ_A i δ_B, wskaż minimalne wartości δ_A i δ_B, dla których ten profil jest równowagą doskonałą w podgrach (SPNE).

[Wskazówka: Porównaj wypłatę Andrzeja w długim okresie jeżeli zawsze gra kooperacyjnie i drugą, w której n razy gra kooperacyjnie, a następnie zaczyna grać niekooperacyjnie. Rozważ strategie typu Grim-trigger Basi: graj kooperacyjnie dopóki Twój przeciwnik gra kooperacyjnie. Jak przeciwnik nagle zagra niekooperacyjnie, w następnym okresie zagraj niekooperacyjnie i już zawsze tak graj.]

Wypłata Andrzeja, jeżeli oboje grają zawsze (D,2) wynosi: $2\frac{1}{1-\delta_A}$

Wypłata Andrzeja, jeżeli n razy gra D za n+1 razem gra S i już później zawsze gra S. Natomiast Basia przez n+1 razy gra 2 a następnie już zawsze gra 1 (strategia Grim trigger) wynosi: $2\frac{1-\delta_A^n}{1-\delta_A} + 3\delta_A^n + 1\delta_A^{n+1}\frac{1}{1-\delta_A}$.

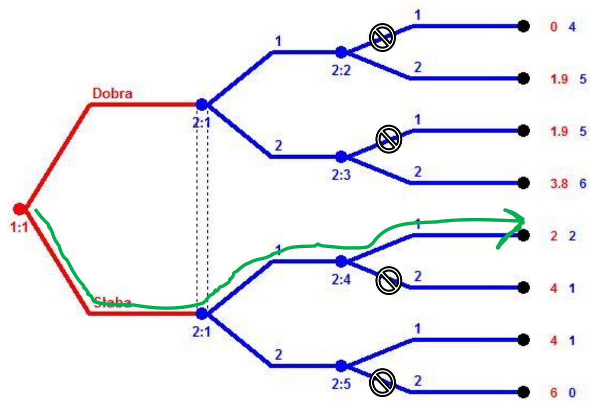
Aby Andrzej grał kooperatywnie musi być spełniony warunek:

$$2\frac{1}{1-\delta_A} \geq 2\frac{1-\delta_A^n}{1-\delta_A} + 3\delta_A^n + 1\delta_A^{n+1}\frac{1}{1-\delta_A}$$

Który jest równoważny następującemu warunkowi: $\delta_A \geq \frac{1}{2}$. Aby powyższe rozumowanie było właściwe musimy również zapewnić, żeby Basię „interesowały" również wypłaty po pierwszym okresie, tj. $\delta_B > 0$.

Teraz załóż, że zamiast wybierać jakość herbaty za każdym razem od nowa w każdym okresie, Andrzej wybiera jakość na początku i nie może zmienić jej później. Basia, tak jak wcześniej, wybiera w każdym okresie na nowo i decyduje, czy zakupić 1 czy 2 puszki. Basia wie, że jakość herbaty Andrzeja jest ustalona na początku gry, ale w pierwszym okresie w momencie kupna (przed wypiciem) nie wie, czy Andrzej zdecydował się produkować herbatę słabej czy dobrej jakości. Po kupieniu herbaty w pierwszym okresie, Basia może ją spróbować i się przekonać, jakiej jest jakości. Wypłaty są takie same, jak poprzednio, za wyjątkiem wypłaty Andrzeja w sytuacji, kiedy on wybierze dobrą jakość a Anna kupi 2 puszki, która jest zredukowana z 2 do 1.9. Niech $\delta_A=\delta_B=1$.

d) [2p] Załóżmy, że są dwa okresy. Narysuj drzewo dla tej gry, uważając przy tym, aby zaznaczyć co Anna wie i kiedy to wie.



e) [2p] Narysuj tą samą grę w postaci strategicznej (w postaci tabelki) i znajdź wszystkie równowagi Nasha tej gry.

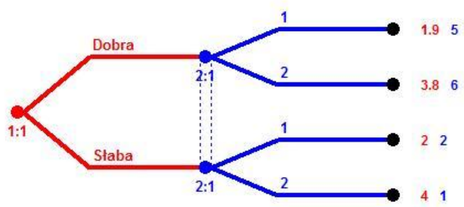
[Wskazówka: Zastanów się dokładnie ile strategii ma Anna oraz co wie w momencie podejmowania swoich decyzji (zapis strategii jest dowolny, ale wyjaśnij dokładnie co oznaczają kolejne symbole w zapisie strategii Anny)]

Anna ma 32 strategie dla swoich 5 zbiorów informacyjnych. Andrzej ma tylko dwie strategie.

Tabelka gry miała by zatem wymiar 2x32.

f) [2p] Znajdź równowagę doskonałą w podgrach dla tej gry. Wyjaśnij odpowiedź słownie lub na rysunku. Czy istnieje równowaga Nasha, która nie jest równowagą doskonałą w podgrach? Jeśli tak, to która i dlaczego nie jest SPNE?

Równowagami Nasha są wszystkie profile, w których Basia gra optymalnie na ścieżce równowagi a poza nią niekoniecznie. A zatem znajdźmy najpierw równowagę doskonałą w podgrach, w której gracze grają optymalnie nie tylko na ścieżce równowagi, ale również poza nią. Rozwiązujemy zatem od tyłu. W drugim okresie (patrz rysunek powyżej) optymalna gra Basi to 2211, tj. Basia wybiera dwie puszki w węzłach decyzyjnych, w których dowiedziała się, że herbata jest dobrej jakości oraz wybiera jedną puszkę w dwóch węzłach decyzyjnych, w których dowiedziała się, że herbata jest słabej jakości. Następnie rozwiązujemy pozostałą grę:



Równowaga doskonała w podgrach wynosi zatem (S, 1_{2211}), gdzie duże znaki oznaczają akcje graczy w pierwszym okresie a małe znaki oznaczają akcje Basi w czterech węzłach decyzyjnych w drugim okresie. Zauważmy, że ścieżka równowagi wiedzie przez trzeci węzeł decyzyjny Basi w drugim okresie (patrz zielona strzałka na wykresie powyżej). Każda strategia, która będzie optymalna na ścieżce równowagi a poza nią niekoniecznie, będzie równowagą Nasha. A zatem ważne jest jedynie, żeby Andrzej grał S, Basia w pierwszym okresie grała 1 i w drugim okresie grała 1 (na zielono oznaczono w równowadze doskonałej w podgrach to, co gracze robią na ścieżce równowagi (S, 1_{2211})). A zatem wszystkie równowagi Nasha to:

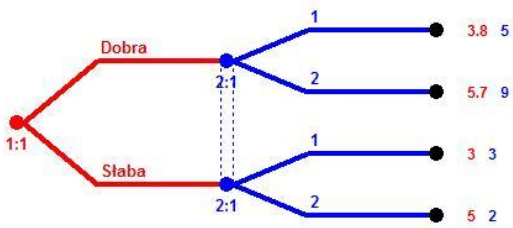
(S, 1_{1111}), (S, 1_{2111}), (S, 1_{1211}), (S, 1_{1112}), **(S, 1_{2211})**, (S, 1_{2112}), (S, 1_{1212}), (S, 1_{2212})

Z czego pogrubiona to równowaga doskonała w podgrach.

g) [2p] Jaka jest minimalna liczba okresów w tej grze, aby istniała równowaga doskonała w podgrach, w której Andrzej zdecyduje się robić dobrą herbatę? Wyjaśnij odpowiedź.

[Wskazówka: pomimo, iż możesz, nie potrzebujesz rysować nowego drzewa]

Rozważmy trzy okresy. Nie będziemy rysować całego drzewa, ale szybko można się przekonać, że po zwinięciu dwóch ostatnich okresów, problem zredukowany w pierwszym okresie przedstawia się jak na drzewie poniżej:



Równowaga w tej grze zredukowanej w pierwszym okresie, jak łatwo się przekonać (na przykład rysując tabelkę i rozwiązując standardowo) to (D,2). A zatem wystarczy 3 okresy, aby osiągnąć kooperację: nie podajemy tutaj pełnego oznaczenia równowagi doskonałej w podgrach, ponieważ przy 3 okresach Basia ma 2^{13} strategii (13 zbiorów informacyjnych).